Komplexe Zahlen
Kreisgleichungen

Datei Nr. 50036

Friedrich Buckel

Stand 14. November 2023

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK
UND STUDIUM

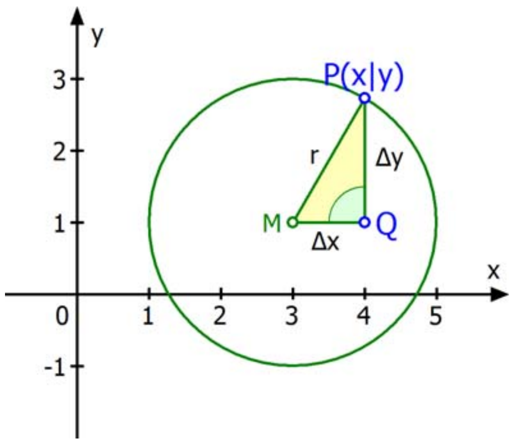
https://mathe-cd.de

Inhalt

1 Kreise in der Gaußschen Zahlenebene

1.1 Kreisgleichungen reell

Ein Kreis ist definiert als die Menge aller Punkte, die von einem Punkt einen festen Abstand haben.



Voraussetzung ist hier, dass die Grundmenge eine **Ebene** ist. Wäre sie der Anschauungsraum, dann würde diese Definition eine Kugel ergeben.
Den Punkt, zu dem der Abstand gemessen wird, heißt **Mittelpunkt des Kreises**, der Abstand heißt **Radius**.

Aus dieser Definition folgt die Kreisgleichung so:

Der Mittelpunkt habe die Koordinaten $M(x_M \mid y_M)$, und der beliebige Kreispunkt sei $P(x \mid y)$.
Nach dem Satz des Pythagoras berechnet man den Abstand r von P und M durch

$$r^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 \qquad (1)$$

Dabei bezeichnet $\Delta x = x - x_M$ und $\Delta y = y - y_M$ die Differenz der Koordinaten.
Damit folgt aus (1) die so genannte Kreisgleichung:

$$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2 \qquad (2)$$

Ist speziell der Ursprung der Mittelpunkt, dann ist $M(0 \mid 0)$.
Die Gleichung eines Ursprungskreises lautet daher:

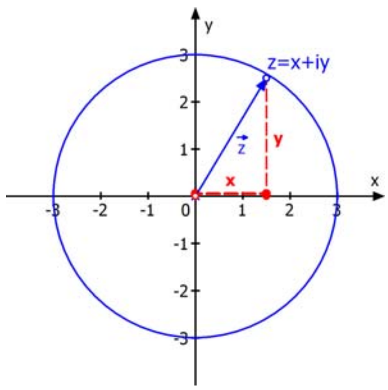
$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad (3)$$

1.2 Kreisgleichungen komplex

In der Gaußschen Zahlenebene kann man komplexe Zahlen genauso darstellen, wie in einer reellen Zahlenebene. Man kann beispielsweise eine komplexe Zahl als Punkt darstellen oder als Pfeil vom Ursprung zu diesem Punkt. Den Abstand der komplexen Zahl z vom Ursprung wird der Betrag $|z|$ genannt.

a) Bei einem Ursprungskreis ist dann dieser Betrag gleich dem Radius.

Ursprungskreise haben also die Bedingung: $|z| = r$



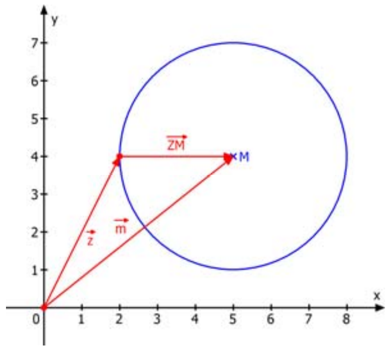
Mit $z = x + iy$ folgt $\quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = r$.

Man kann auch so rechnen: $\left|z^2\right| = z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = r^2$

Das führt zu $\quad x^2 + \cancel{ixy} - \cancel{ixy} - i^2y^2 = r^2$

Und wegen $i^2 = -1$: $\quad \boxed{x^2 + y^2 = r^2}$

b) Liegt der Kreismittelpunkt nicht im Ursprung …



Mit $M \neq O$ wird der Radius durch den Pfeil $\overrightarrow{ZM}$ dargestellt.

Sein Betrag ist $|z-m| = r$ bzw. quadriert:

$$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2)$$

Man kann diese Rechnung auch zu einem anders aussehenden Ergebnis führen.

Dazu benötigt man folgende Kenntnisse:

$$|z-m|^2 = (z-m)\overline{(z-m)}$$

und ferner: $\overline{z-m} = \bar z - \bar m$, **) Beweis siehe unten*

Dann folgt $|z-m|^2 = (z-m)(\bar z - \bar m) = z\bar z - m\bar z - z\bar m + m\bar m$

Damit geht die Kreisgleichung $|z-m| = r$ über in $z\bar z - m\bar z - z\bar m + m\bar m = r^2$

bzw. $z\bar z - m\bar z - \bar m z + (m\bar m - r^2) = 0$

Da $m\bar m = |m| = c$ eine reelle Zahl ist, kann man zusammenfassen: $d := m\bar m - r^2$

Damit lautet die betragsfreie **komplexe Kreisgleichung** für die Gauß-Ebene:

$$\boxed{z\bar z - m\bar z - \bar m z + d = 0}$$

SATZ

Die Punktmenge $\{z \mid z\bar z - m\bar z - \bar m z + d = 0 \text{ mit } m \in \mathbb{C} \text{ und } d \in \mathbb{R}\}$

ist ein Kreis um den Mittelpunkt $M(a \mid b)$ d. h. $m = a + bi$, wenn $d = m\bar m - r^2 > 0$ ist.

Hier kommt zwangsläufig die Frage: Wozu braucht man diese kompliziert aussehende Gleichung? Die Antwort ist einfach: In der komplexen Funktionentheorie gibt es Aufgaben mit Kreisen, die sich damit leichter lösen lassen.

Ich zeige auf der nächsten Seite, dass diese Gleichung in Wirklichkeit „einfach“ zu handhaben ist.

***) Begründung: zu** $\overline{z-m} = \bar z - \bar m$

Es sei $z = u + v \cdot i$ und $m = r + s \cdot i$, dann folgt $z - m = (u + v \cdot i) - (r + s \cdot i) = (u-r) + (v-s) \cdot i$

und daher ist $\overline{z-m} = (u-r) - (v-s) \cdot i$

Andererseits ist $\bar z = u - vi$ und $\bar m = r - si$.

Daraus folgt $\bar z - \bar m = (u - v \cdot i) - (r - s \cdot i) = (u-r) - (v-s)i$

Beispiele zur komplexen Kreisgleichung.

Die Betragsgleichung lautet $|z-m|=r$ oder $|z-m|^2=r^2$.

Man sollte sich merken: $|z|^2=z\bar{z}$, also $|z-m|^2=(z-m)(\bar{z}-\bar{m})=z\bar{z}-\bar{m}z-m\bar{z}+m\bar{m}$

Und damit lautet die Kreisgleichung $z\bar{z}-\bar{m}z-m\bar{z}+m\bar{m}=r^2$. Man hat sie also schnell hergeleitet und muss sich gar nicht so viel merken.

Wenn man nun eine Gleichung dieser Art gegeben hat, etwa $z\bar{z}-\frac{3-10i}{4}z-\underbrace{\frac{3+10i}{4}}_{m}\bar{z}-1=0$,

dann muss man darauf achten, dass die "mittleren" Koeffizienten zwei konjugiert komplexe Zahlen sind: m und $\bar{m}$, die sich also nur im Vorzeichen des Imaginärteils unterscheiden.
Diejenige Zahl, die bei $\bar{z}$ steht, gibt den Kreismittelpunkt an.
Dann fehlt noch der Radius. Der kurzen obigen Herleitung entnimmt man: $m\bar{m}-r^2=\boxed{-1}$

Also rechnet man: $r^2=m\bar{m}+1=....$ und man kennt die Kreisdate

Hier die Aufgabe 1:

Berechne Mittelpunkt und Radius des Kreises $z\bar{z}-\frac{3-10i}{4}z-\underbrace{\frac{3+10i}{4}}_{m}\bar{z}-1=0$

Lösung:

Allgemeine Form: $z\bar{z}-\bar{m}z-m\bar{z}+\left(m\bar{m}-r^2\right)=0$

(1) Durch Vergleichen folgt: $m=\frac{3+10i}{4}=\frac{3}{4}+\frac{5}{2}i \quad \hat{=} \quad M\left(\frac{3}{4}\,|\,\frac{5}{2}\right)$

(2) Aus $m\bar{m}-r^2=-1$ folgt $r^2=m\bar{m}+1=\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{2}i\right)\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{2}i\right)+1=\left(\frac{9}{16}+\frac{25}{4}\right)+1=\frac{109}{16}+1=\frac{125}{16}$

Also hat der Kreis den Radius $r=\sqrt{\frac{125}{16}}=\frac{5}{4}\sqrt{5}$

Die Koordinatengleichung des Kreises ist also: $\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{125}{16}$

Hinweis: Einen anderen Lösungsweg erhält man, wenn man $z=x+iy$ ersetzt:

$$(x+iy)(x-iy)-\frac{3-10i}{4}(x+iy)-\frac{3+10i}{4}(x-iy)-1=0$$

$$x^2+y^2-\frac{3}{4}x-\cancel{\frac{3}{4}iy}+\cancel{\frac{10}{4}ix}-\frac{10}{4}y-\frac{3}{4}x+\cancel{\frac{3}{4}iy}-\cancel{\frac{10}{4}ix}-\frac{10}{4}y-1=0$$

$$\left(x^2-\frac{3}{2}x\right)+\left(y^2-5\right)=1$$

Quadratische Ergänzung: $\left(x^2-\frac{3}{2}x+\boxed{\frac{3}{4}}^2\right)+\left(y^2-5+\boxed{\frac{5}{2}}^2\right)=1+\boxed{\frac{9}{16}}+\boxed{\frac{25}{4}}$

Ergebnis: $\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{125}{16}$

Aufgabe 2

Zeige, dass die folgende Gleichung einen Kreis beschreibt.

Bestimme seinen Mittelpunkt und seinen Radius.

$$z\bar{z} - 4i\bar{z} + 4i\bar{z} - 9 = 0$$

Lösung: